Mathématique des billards

The Happy Together Project

(La sculpture animée de Bruno Yvonnet)

Vincent Borrelli et Jean-Luc Rulliere

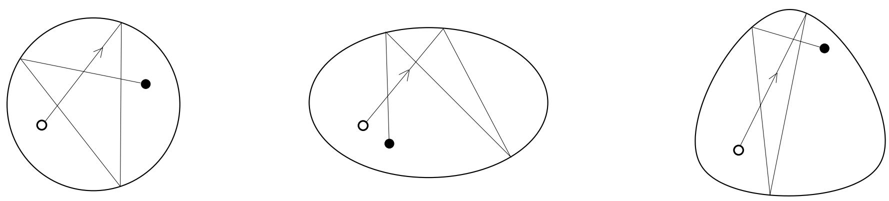
Octobre 2004

L'étude mathématique de la sculpture animée d'Yvonnet (The Happy Together Project) relève d'une branche des mathématiques appelée *systèmes dynamiques*. Cette science a pour objectif de comprendre tout ce qui a trait au mouvement, par exemple la trajectoire des planètes du système solaire, la météorologie ou le mouvement d'une boule de billard. C'est de la science des systèmes dynamiques qu'a emmergé la notion de chaos, un phénomène qui, lorsqu'il apparaît, s'oppose à toute prédiction à moyen terme sur l'évolution des choses.

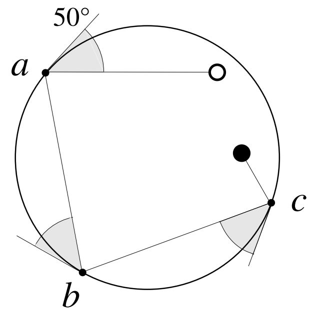
Parmi les mouvements déjà étudiés par les mathématiciens, celui qui se rapproche le plus de celui qui apparaît dans le HTP est le mouvement d'une boule de billard dans une enceinte. Ce système dynamique particulier relève d'une théorie à part entière dite *théorie des billards* et cette théorie nous révèle qu'il est très difficile de faire des prévisions même dans une enceinte aux formes élémentaires. Le HTP s'apparente à un billard constitué de deux boules évoluant en trajectoires tantôt circulaire tantôt rectiligne, on ne sera donc pas surpris que l'étude mathématique d'un tel système soit extrêmement délicate.

Un petit aperçu de la théorie des billards

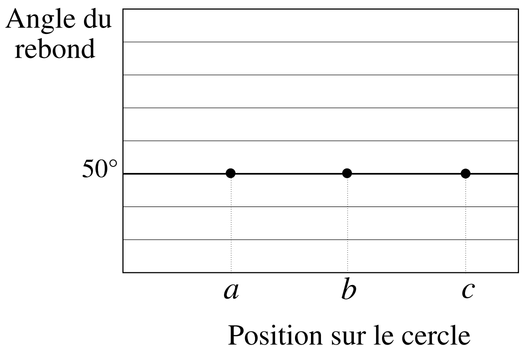
L'étude mathématique du HTP étant relativement compliquée, on se propose ici de donner un aperçu de la théorie des billards à travers de quelques exemples élémentaires. Dans cet aperçu, nous allons observer que même dans ces situations très simples, le chaos peut survenir. C'est d'ailleurs là une des grandes révélation de l'étude des systèmes dynamiques : le chaos n'est jamais bien loin. Dans les exemples que nous allons prendre, l'enceinte revêt une forme élémentaire à l'intérieur de laquelle une seule boule évolue en ligne droite. Les lois du rebond sont tout naturellement les lois de réflexions de Descartes, c'est-à-dire celles que suit un rayon lumineux qui frappe une surface réfléchissante.



En général, les trajectoires qui apparaissent s'enchevètrent de plus en plus au fur et à mesure des rebonds avec néanmoins de notables exceptions. Certaines trajectoires par exemple peuvent se refermer sur elles-mêmes et rebondir indéfiniment aux mêmes points. Une bonne façon d'appréhender la situation dans son ensemble est de réaliser ce que les mathématiciens appellent *un portrait de phase*. Ce portrait de phase donne une image du comportement global du système, il permet de mettre en évidence sa grande régularité ou au contraire la présence de chaos en son sein. Voyons, sur l'exemple du billard circulaire, comment établir un tel portrait de phase. La trajectoire d'une boule dans un billard n'est autre qu'une succession de rebonds et chacun de ces rebonds peut être décrit mathématiquement par sa position sur le cercle et l'angle sous lequel il le frappe.

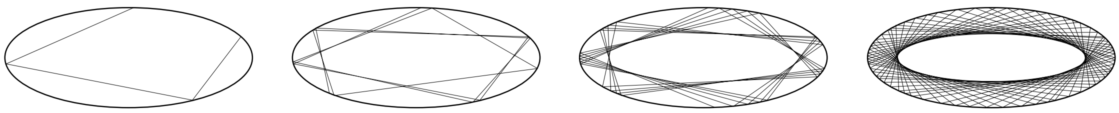


Dans le billard circulaire, on observe qu'une fois la boule lancée, l'angle de chaque rebond reste inchangé. Sur la figure ci-dessus, où nous avons représenté trois rebonds, il est toujours égal à 50°. Pour représenter ceci mathématiquement, on «déroule» le cercle en une ligne horizontale, et au dessus de chaque endroit où la boule a rebondi, on place un point à une hauteur qui correspond à l'angle de ce rebond. Puisque dans notre exemple l'angle est toujours égal à 50°, tous les points vont se trouver à la même hauteur.

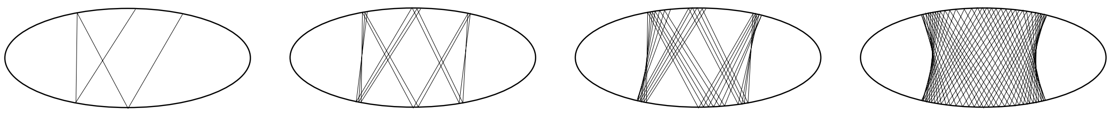


Dans un tel diagramme, la trajectoire d'une boule est réduite à une succession de points, chacun de ces points donnant la position et l'angle d'un rebond. Cette représentation est bien entendu moins naturelle que le dessin naif des trajectoires dans le billard, mais elle offre l'avantage d'en visualiser les propriétés remarquables. La représentation de nombreuses trajectoires fait apparaître des alignements horizontaux qui sont l'expresssion de la conservation de l'angle au cours de chaque trajectoire. Ce diagramme, composé de lignes horizontales, s'appelle le *portrait de phases* du billard circulaire, sa grande simplicité reflète la régularité des trajectoires, conséquente à la parfaite symétrie de ce billard.

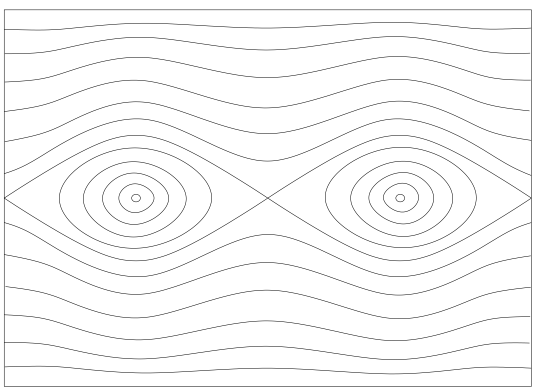
Quel serait par conséquent le portrait de phases d'un billard moins symétrique que le billard circulaire, par exemple un billard elliptique ? Pour le savoir, il est nécessaire de représenter un grand nombre de trajectoires. On observe alors que l'angle de rebond varie au cours de la trajectoire. Malgré tout une grande régularité demeure qui se manifeste assez rapidement après quelques rebonds, cette régularité devient vraiment évidente lorsque l'on en représente une multitude : une courbe parfaite se dessine alors et la révèle.



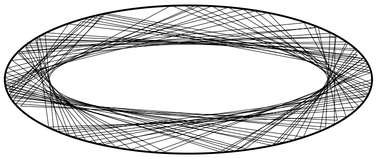
Dans l'illustration ci-dessus cette courbe est encore une ellipse. Bien sûr, cette ellipse dépend de l'angle d'attaque de la boule de billard, elle devient de plus en plus écrasée au fur et à mesure que cet angle d'attaque augmente. Passé un certain angle, une rupture se produit et une courbe visuellement très différente apparaît, nous l'avons représentée ci-dessous. Cette courbe, bien connue depuis l'Antiquité, est une hyperbole.

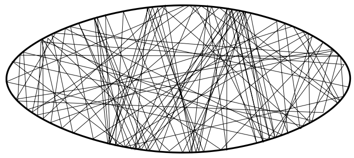


Qu'en est-il du portrait de phases de ce billard elliptique ? L'angle de rebond n'étant plus conservé, les rebonds successifs d'une même trajectoire ne se trouvent plus sur une ligne horizontale. On constate néanmoins que ces trajectoires demeurent sur des courbes d'une grande régularité, nous en avons représenté quelques unes dans le diagramme ci-dessous. Ces courbes sont de deux types : des courbes ondulées, en haut et en bas du diagramme, qui correspondent à des trajectoires qui dessinent une ellipse, et des paires de courbes ovoïdales, qui correspondent aux trajectoires qui dessinent une hyperbole.



Ce diagramme est certes moins élémentaire que celui du billard circulaire, mais il est tout de même empreint d'une grande régularité qui signe la présence d'un ordre global dans le système du billard elliptique. Ce système n'est donc en rien chaotique, cependant comme nous l'avons déjà annoncé, le chaos n'est pas très loin. Il suffit pour s'en rendre compte de déformer très légèrement l'ellipse qui forme le contour du billard et de s'intéresser à nouveau aux comportements des trajectoires. Autrement dit, on reprend l'étude précédente pour un billard dont la forme n'est plus une ellipse parfaite. On observe alors que certaines trajectoires s'avèrent relativement peu sensibles à cette perturbation (dessin de gauche) alors que d'autres sont affectées d'un comportement chaotique (dessin de droite).

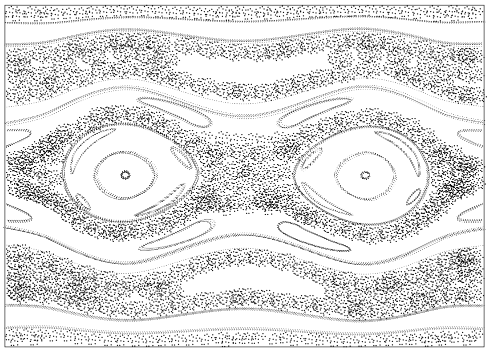




Dans ce dessin la perturbation qui a été appliquée à l'ellipse est tellement infime qu'elle n'est pas visible à l'œil nu. Et pourtant certaines trajectoires s'en trouvent complètement bouleversées, une toute petite modification a suffit à briser l'extrême régularité que l'on observait dans le comportement du billard elliptique et on se trouve, pour la première fois, en présence d'un phénomène que l'on pourra qualifier de chaotique. Ceci contredit une intuition que nous avons tous selon laquelle une toute petite modification de la cause induit une toute petite modification de l'effet. Dans la vie concrète, si on réalise une table de billard en forme d'ellipse, cette dernière ne pourra pas être, par la force des choses, une ellipse parfaite et ce seront les trajectoires perturbées représentées ci-dessus auxquelles on aura affaire. Autrement dit, et de façon plus générale, toute idéalisation de la réalité à l'aide de formes mathématiques pures mérite d'être considérée avec une grande prudence.

Revenons maintenant à l'illustration de droite, la complexité de la trajectoire est si grande qu'il semble tout à fait exclu qu'elle puisse recéler une quelconque régularité, autrement dit, il est hautement improbable que l'on soit capable d'en découvrir une loi cachée. Or une telle loi est justement la seule prise que nous ayons pour *comprendre* et décrire simplement cette trajectoire. Sans elle, la trajectoire de la boule de billard n'apparaît que comme une suite de rebonds dont la totalité reste inintelligible.

Comment, en dépit de ces phénomènes déroutants, avancer dans la compréhension des trajectoires ? Une démarche fructueuse consiste à les considérer dans leur ensemble plutôt que d'essayer de les appréhender les unes après les autres. Pour le dire d'une manière imagée, on aimerait dresser un panorama général de la situation en espérant que celui-ci se revèlera éclairant et qu'il puisse dévoiler d'éventuelles structures de l'ensemble. C'est précisément ce que permet de faire le portrait de phase, il nécessite néanmoins de représenter un grand nombre de trajectoires ce qui, à la main, se révèle très fastidieux. Il est donc indispensable de procéder à une simulation informatique et c'est elle qui fournit la figure représentée ci-dessous.

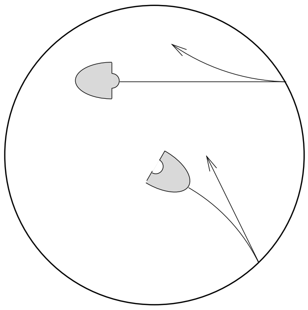


Le portrait obtenu garde, en partie, la structure de celui du billard elliptique parfait et rend compte des phénomènes observés précédemment, par exemple la relative conservation de certaines trajectoires. Ainsi, les lignes ondulées correspondent à des trajectoires qui ont été préservées, à l'image de celle représentée à gauche dans l'illustration qui précède ce portrait. En revanche nombre d'entre elles ne suivent plus des lignes régulières mais errent chaotiquement dans de grandes étendues du diagramme. Ces grandes plages de désordre occupent la quasi totalité du portrait hormis quelques îlots de stabilité. Ces îlots sont les vestiges des grandes structures régulières qui composaient le portrait de phase du billard elliptique non perturbé. Le désordre important causé par la perturbation n'est donc pas total, le portrait de phase permet de le circonscrire et d'en visualiser l'ampleur.

Il faut cependant rester prudent dans l'interprétation de ce portrait de phase, il résulte en effet de calculs numériques effectués par une machine, par conséquent la figure que l'on obtient au final peut être entachée d'erreurs dues aux arrondies successifs dans les calculs. Elle pourrait également se révéler trop incomplète pour refléter la réalité des choses, puisque, bien sûr, seul un nombre *fini* de trajectoires peut être représenté. En fait, personne à l'heure actuelle, ne comprend mathématiquement le portrait de phase d'un billard perturbé et il se pourrait que nos intuitions et nos interprétations à son sujet s'avèrent inexactes.

Le Happy Together Project

La scupture animée du HTP consiste en deux mobiles qui se déplacent dans une enceinte circulaire, ces mobiles ayant une forme complémentaire ils peuvent s'emboîter et n'en former plus qu'un. La trajectoire de chaque mobile est alternativement rectiligne ou circulaire et celle-ci change à l'occasion des chocs avec la paroi de l'enceinte ou entre les mobiles. La loi du rebond n'est pas celle de Descartes, à chaque rebond le mobile ne change pas de direction, il repart simplement en sens inverse. Dans le HTP, l'animation s'achève quand les mobiles se retrouvent accolés, c'est-à-dire lorsqu'ils avancent tous deux l'un en face de l'autre, sur la même ligne droite et finissent donc par s'emboîter.



Une question naturelle, et qui relève des mathématiques, est celle de la possibilité ou non de cette rencontre : étant donnée une situation de départ, les deux mobiles vont-ils oui ou non se réunir, et si oui, au bout de combien de temps ? Répondre à cette question semble aisé, les mouvements étant très simples, un calcul élémentaire devrait *a priori* en venir à bout. Toutefois l'expérience acquise avec les billards doit nous porter à la prudence, en effet le HTP est très semblable à un billard ayant deux mobiles et l'on doit s'attendre à voir apparaître des phénomènes de chaos...

Pour réaliser l'étude du mouvement des mobiles du HTP, il est d'abord nécessaire de traduire le problème en termes mathématiques et donc d'idéaliser la situation. On supposera que l'enceinte est un cercle parfait et qu'à l'intérieur de ce cercle évoluent deux mobiles assimilés à des points. A la différence du billard, le portrait de phase de ce système ne peut se visualiser directement, car il s'agit dans ce cas d'un diagramme à quatre dimensions. Cette difficulté est cependant d'ordre purement visuel, elle n'empêche aucunement le mathématicien de faire des calculs. Dans la *situation idéalisée* décrite ci-dessus, ces calculs sont formels : une telle rencontre est quasiment impossible. Ce *quasiment* signifie en langage mathématique que la probabilité de l'événement que constitue cette rencontre est égale à zéro, on dit aussi qu'une telle rencontre n'a «presque sûrement» jamais lieu. Néanmoins la situation *réelle* n'est précisément pas la situation idéalisée, l'enceinte ne sera jamais *parfaitement* circulaire, les mobiles s'emboîteront même s'ils n'avancent pas *exactement* sur la même ligne droite. Comme cela a été observé dans le cas du billard elliptique, de petites imperfections peuvent parfois être génératrices de chaos et ce chaos, en modifiant totalement les trajectoires, peut rendre très probable une rencontre *a priori* impossible. Autrement dit, ces imperfections, aussi petites soient elles, peuvent changer la situation du tout au tout. De nombreuses trajectoires vont se rencontrer alors qu'elles s'évitent indéfiniment dans la situation idéalisée. Malheureusement, notre profonde incompréhension des phénomènes des chaos nous empêche d'être plus précis et de dire lesquelles.

Conclusion 1. – *Dans l'état actuel des connaissances en mathématiques, il est impossible de prédire à partir d'une configuration de départ quelconque, si les deux mobiles vont finir par s'emboîter.*

Cette conclusion ne doit pas nous décourager, car en s'autorisant une hypothèse très peu restrictive –à savoir le départ en position accolée des deux mobiles– un théorème très général nous assure que les deux mobiles se réuniront à nouveau. Ce théorème est dû à Henri Poincaré[1] et il signifie pour le problème qui est le notre, qu'une attente suffisamment longue nous garantit «presque sûrement» un retour des deux mobiles à une situation extrêment proche de la situation initiale. Les mathématiciens ont nommé ce théorème le *théorème de récurrence de Poincaré* pour signifier précisément que les mobiles reviennent de manière récurrente à une position aussi proche que l'on veut de la position de départ. En revanche, ce théorème ne nous garantit pas un retour à la position initiale *stricto sensu*, ce sont les petites imperfections évoquées plus haut qui en fin de compte permettent l'emboîtement final.

Conclusion 2. – *Si à l'origine, les deux mobiles sont accolés alors quitte à attendre longtemps, leur réunion est hautement probable.*

Dans un cadre un peu plus idéalisé où l'enceinte est un cercle parfait et où les mobiles démarrent d'une position accolé de part et d'autre d'une ligne médiane, il est alors possible de déterminer où et quand la réunion aura à nouveau lieu. Par exemple, si les mobiles partent ainsi du centre[2] ils iront à la rencontre l'un de l'autre avec un décalage infime au bout de 115 rebonds. Ces calculs sont présentés dans l'exposition.

Conclusion 3. – *Si l'enceinte est un cercle parfait et les deux mobiles partent accolés et de façon symétrique, alors il devient possible de calculer où et quand ils se réuniront à nouveau.*

Les phénomènes de chaos qui surviennent dans la sculpture animée du HTP et qui rendent probable un appariement en toute théorie impossible, se rencontrent dans de très nombreux contextes. Ils interviennent par exemple de façon majeure en météorologie et dans l'étude du mouvement des planètes où ils sont un obstacle à toute prédiction à moyen terme. Ce sont eux qui empêchent de connaître la position de la planète Terre dans 100 millions d'années ou encore le temps qu'il fera dans huit jours.

V. Borrelli et J.-L. Rullière
Département de Mathématiques
Université Claude Bernard, Lyon 1
43, boulevard du 11 Novembre 1918
69622 Villeurbanne Cedex, France

[1] Henri Poincaré (1854-1912), mathématicien français, célèbre pour sa fécondité mathématique et en particulier pour ses travaux sur les systèmes dynamiques. Le président Raymond Poincaré était son cousin.

[2] En fait, légèrement décalés afin que les mobiles ne puissent jamais s'entrechoquer.